第８講 実践演習問題 第３問・第４問

第３問

太郎さんと花子さんは，数列の漸化式に関する問題 A～C について話している。二人の会話を読んで，下の問いに答えよ。

(1)

> 問題A　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
>
> $$a_1=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

> 太郎：教科書で習った漸化式の形と違って，分数式になっていて難しそうだな。
>
> 花子：$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいてみたらどうかしら？
>
> 太郎：［ア］となったよ。これは教科書で習った形だよね。
>
> 花子：数列 $\{b_n\}$ は初項［イ］，公差［ウ］の等差数列と分かるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$［エ］と求まるわね。

(i) ［ア］に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$　① $b_{n+1}=b_n+3$　② $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+3$

③ $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{3}$　④ $b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n}+3$　⑤ $b_{n+1}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{3}$

(ii) ［イ］，［ウ］に当てはまる数を求めよ。

(iii) ［エ］に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $3n-1$　① $3n+1$　② $\dfrac{1}{3n-5}$

③ $\dfrac{1}{3n+5}$　④ $\dfrac{1}{3n-1}$　⑤ $\dfrac{1}{3n+1}$

(第３問は次ページに続く。)

(2)

問題B　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=3,\ \ a_{n+1}=\frac{a_n}{1-a_n}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

花子：問題A と少し形が違うわね。

太郎：$a_1=3$ だから，$a_n=0$ となることはないから，両辺の逆数をとってみたらどうかな。

花子：［オ］となったわよ。

太郎：$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて，問題A のようにして解けばいいんだね。

花子：数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=$［カ］と求まるわね。

太郎：ここで考えたことを利用すると，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{2^2}{a_3}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{a_n}$ の和も求まりそうだね。

(i)［オ］に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_n-\dfrac{1}{a_n}$　① $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}-a_n$　② $\dfrac{1}{a_{n+1}}=1-\dfrac{1}{a_n}$

③ $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}-1$　④ $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$　⑤ $a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n}-1$

(ii)［カ］に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{3}{4+3n}$　① $\dfrac{3}{3n-4}$　② $\dfrac{3}{2-3n}$

③ $\dfrac{3}{4-3n}$　④ $\dfrac{3}{4n+3}$　⑤ $\dfrac{3}{3-4n}$

(iii) $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{2^2}{a_3}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{a_n}$ の和を求めると

$$\frac{(\boxed{キ}-3n)\boxed{ク}^{\,n}-\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

となる。

（第３問は次ページに続く。）

(3)　二人は問題A，Bで考えたことを応用する問題Cについて会話をしている。

> **問題C**　次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
>
> $$a_1=\frac{6}{5},\ a_{n+1}=-\frac{a_n-1}{6a_n-10}+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

> 花子：今までの漸化式と式の形が違うわね。どう解けばいいのかしら？
>
> 太郎：**問題B** の漸化式の分子は a_n だけだったね。
>
> 花子：だったら，$b_n=a_n-$ **サ** とおいて，変形するといいんじゃないかしら？
>
> 太郎：$b_{n+1}=$ **シ** となったよ。
>
> 花子：**問題B** でやったように，両辺の逆数をとって $c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおけばいいわね。
>
> 太郎：$c_{n+1}=$ **ス** となるね。ここからは教科書で習ったように
> $c_{n+1}-2=4(c_n-2)$ と変形すると，
> 数列 $\{c_n-2\}$ は **セ** であることから，$c_n=$ **ソ** $\cdot 4^{n-1}+$ **タ**
> と求まるよ。
>
> 花子：あとは，c_n，b_n，a_n の順に求めていけば，a_n を n の式で表すことができるね。

(i)　**サ** に当てはまる数を求めよ。

(ii)　**シ** に当てはまる式を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $\dfrac{b_n}{b_n-4}$　① $\dfrac{b_n}{4-6b_n}$　② $\dfrac{b_n}{16-6b_n}$

③ $\dfrac{b_n}{16+6b_n}$　④ $-\dfrac{b_n-1}{6b_n-10}$　⑤ $\dfrac{4-6b_n}{b_n}$

(iii)　**ス** に当てはまる式を，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪ $4c_n+6$　① $4c_n-6$　② $-4c_n+6$

③ $-4c_n-6$　④ $\dfrac{1}{4c_n+6}$　⑤ $\dfrac{1}{4c_n-6}$

（第３問は次ページに続く。）

(iv) [セ] に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 初項 3，公比 4 の等比数列
① 初項 5，公比 4 の等比数列
② 初項 3，公差 4 の等差数列
③ 初項 5，公差 4 の等差数列

(v) [ソ]，[タ] に当てはまる数を求めよ。

(vi) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_n=\frac{4}{\boxed{チ}\cdot\boxed{ツ}^{n}+\boxed{テ}}+\boxed{ト}$$

第４問

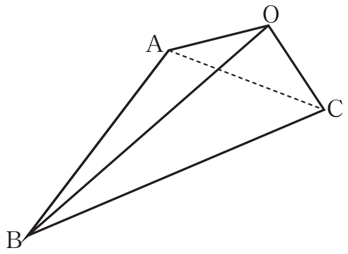
右の図のような四面体 OABC がある。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，

$|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

$\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ であるとき，

次の問いに答えよ。



(1)　四面体 OABC の体積 V を，以下のようにして求めた。

(i)　△ABC において，∠BAC＝θ とおくと

$|\overrightarrow{AB}|=$ [ア]，$|\overrightarrow{AC}|=$ [イ]

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ [ウ]

であるから

$\cos\theta=$ [エ]

となる。

したがって，△ABC の面積を S とおくと

$S=$ [オ]

と求められる。

（第４問は次ページに続く。）

(ii) 頂点Oから△ABCに垂線OHをひく。

点Hは3点A，B，Cを通る平面上にあるから，実数の定数x，yを用いて，

[カ] と表される。

また，「 [キ] 」を使って，x，yの値を求めると

$$x=\frac{1}{3},\ y=\frac{1}{2}$$

となる。

したがって，垂線OHの長さは

OH＝[ク]

である。

(i)，(ii)より，四面体OABCの体積Vは

V＝[ケ]

と求められる。

(第４問は次ページに続く。)

カ に当てはまる適当な式を，次の⓪～⑥のうちから**すべて選べ**。

⓪ $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

① $\overrightarrow{OH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

② $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

③ $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

④ $\overrightarrow{OH}=(1-x)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

⑤ $\overrightarrow{OH}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

⑥ $\overrightarrow{OH}=(1+x+y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$

キ に当てはまるものを，次の⓪～⑦のうちから一つ選べ。

⓪ 直線 OH は △ABC の重心を通る

① 直線 OH は △ABC の垂心を通る

② 直線 OH は △ABC の外接円の中心を通る

③ 直線 OH は △ABC の内接円の中心を通る

④ 直線 OH は辺 AB と垂直である

⑤ 直線 OH は辺 AC と垂直である

⑥ 直線 OH は辺 AB と辺 AC の両方に垂直である

⑦ 直線 OH は辺 OA，辺 OB，辺 OC のすべてに垂直である

（第４問は次ページに続く。）

(2)　等式 $4\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{CP}=\vec{0}$ を満たす点 P がどのような位置にあるのかを調べる。

等式を変形して，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}\vec{a}+\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\vec{b}+\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\vec{c}$$

となる。

四面体 OABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を $s:(1-s)$（s は実数の定数）に内分する点を E とすると，

$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OE}$（$k$ は実数の定数）であることが分かっている。

このとき，s，k の値は［タ］であり，点 P の位置については［チ］であることがいえる。

［タ］，［チ］に当てはまるものを，次の解答群のうちから一つずつ選べ。

［タ］の解答群

⓪　$s=\frac{2}{5}$，$k=\frac{5}{9}$　　①　$s=\frac{3}{5}$，$k=\frac{5}{9}$

②　$s=\frac{3}{5}$，$k=\frac{4}{9}$　　③　$s=\frac{2}{5}$，$k=\frac{4}{9}$

［チ］の解答群

⓪　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 2：3 に内分する点を E，線分 OE を 5：4 に内分する点が P

①　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：5 に内分する点を E，線分 OE を 5：9 に内分する点が P

②　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：2 に内分する点を E，線分 OE を 4：5 に内分する点が P

③　辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：2 に内分する点を E，線分 OE を 5：4 に内分する点が P

(第４問は次ページに続く。)

(3)　(2)で求めた点Pについて，次の問いに答えよ。

(i)　四面体PABCの体積は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$，四面体POBDの体積は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ となる。

(ii)　点Pを通り，四面体OABCの辺OA，辺OB，辺OCとそれぞれA′，B′，C′で交わる平面がある。

$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=p\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=q\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=r\vec{c}$，$(0<p<1,\ 0<q<1,\ 0<r<1)$ とおくと，

条件 A′B′＝B′C′＝C′A′ かつ PA′＝PB′＝PC′ を満たすのは $\boxed{\text{ヌ}}$ のときである。

$\boxed{\text{ヌ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つ選べ。

⓪　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{1}{4}$

①　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{1}{2}$

②　$p=\dfrac{2}{5}$，$q=\dfrac{1}{5}$，$r=\dfrac{2}{5}$

③　$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

④　$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

⑤　$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

⑥　$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{1}{3}$

⑦　$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{2}{3}$

⑧　$p=\dfrac{1}{3}$，$q=\dfrac{2}{3}$，$r=\dfrac{2}{3}$

第８講　実践演習問題 第３問・第４問

第３問

(1)　$a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+3$ ……①

(i)　$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと，①より $b_{n+1}=b_n+3$　(❶)

(ii)　数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1=\frac{1}{a_1}=2$，公差 3 の等差数列

(iii)　$b_n=2+(n-1)\cdot 3=3n-1$

したがって，$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{1}{3n-1}$　(❹)

(2)　$a_1=3$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{1-a_n}$ ……②

②において $a_{n+1}=0$ とすると，$a_n=0$ である。

よって，$a_n=0$ である自然数 n が存在すると仮定すると，

$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$ である。

これは $a_1=3$ に反する。よって，すべての自然数 n に関して $a_n=0$ となることはない。

(i)　②の両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1-a_n}{a_n}=\frac{1}{a_n}-1 \quad (❸)$$

(ii)　$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1}=b_n-1$，$b_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{3}$

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $\frac{1}{3}$，公差 -1 の等差数列

よって，$b_n=\frac{1}{3}+(n-1)\cdot(-1)=-n+\frac{4}{3}=\frac{4-3n}{3}$

したがって，$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{3}{4-3n}$　(❸)

(iii)　$S=\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\frac{2^2}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{2^{n-1}}{a_n}$ とおくと，$\frac{1}{a_n}=b_n$ より

$$S=b_1\cdot 1+b_2\cdot 2+b_3\cdot 2^2+\cdots\cdots+b_n\cdot 2^{n-1}$$

$$2S=\qquad b_1\cdot 2+b_2\cdot 2^2+\cdots\cdots+b_{n-1}\cdot 2^{n-1}+b_n\cdot 2^n$$

辺々引いて

$$-S=b_1+(b_2-b_1)\cdot 2+(b_3-b_2)\cdot 2^2+\cdots\cdots+(b_n-b_{n-1})\cdot 2^{n-1}-b_n\cdot 2^n$$

$=b_1-1\cdot(2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})-b_n\cdot 2^n$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}-\dfrac{4-3n}{3}\cdot 2^n$

$=\dfrac{1-3\cdot 2^n+6+(3n-4)\cdot 2^n}{3}=\dfrac{(3n-7)\cdot 2^n+7}{3}$

したがって，$S=\dfrac{(7-3n)\cdot 2^n-7}{3}$

(3)　$a_1=\dfrac{6}{5}$，$a_{n+1}=-\dfrac{a_n-1}{6a_n-10}+1$ ……③

③より　$a_{n+1}-1=-\dfrac{a_n-1}{6(a_n-1)-4}$

$b_n=a_n-1$ とおくと　$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{6b_n-4}=\dfrac{b_n}{4-6b_n}$（①），$b_1=a_1-1=\dfrac{1}{5}$

(2)同様，すべての自然数 n で $b_n\neq 0$

両辺の逆数をとって　$\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{4-6b_n}{b_n}=\dfrac{4}{b_n}-6$

$c_n=\dfrac{1}{b_n}$ とおくと　$c_{n+1}=4c_n-6$（①）……④，$c_1=\dfrac{1}{b_1}=5$

④は $c_{n+1}-2=4(c_n-2)$ と変形できる。

数列 $\{c_n-2\}$ は，初項 $c_1-2=3$，公比 4 の等比数列（⓪）である。

よって，$c_n-2=3\cdot 4^{n-1}$ より　$c_n=3\cdot 4^{n-1}+2$

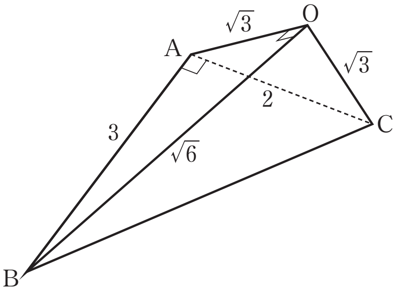
$b_n=\dfrac{1}{c_n}=\dfrac{1}{3\cdot 4^{n-1}+2}$，$a_n-1=\dfrac{1}{3\cdot 4^{n-1}+2}$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3\cdot 4^{n-1}+2}+1=\dfrac{4}{3\cdot 4^n+8}+1$

第４問

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{3}$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=-2$，$\vec{c}\cdot\vec{a}=1$

(i) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2$



$=6+0+3=9$　　よって　$|\overrightarrow{AB}|=3$

$|\overrightarrow{AC}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$

$=3-2+3=4$　　よって　$|\overrightarrow{AC}|=2$

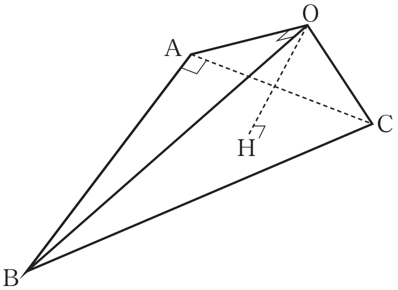
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})$

$=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{a}|^2=-2-0-1+3=0$

$\angle BAC=\theta$ とおくと，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=0$　　よって　$\theta=90°$

したがって，$\triangle ABC$ の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2=3$

(ii) 頂点 O から△ABCに垂線 OH をひくと，点 H は 3 点 A，B，C を通る平面上にあるので，実数 x，y を用いて



$\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$　（②）

と表される。よって，

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{OA}+x(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+y(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$ より

$\overrightarrow{OH}=(1-x-y)\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$　（⑤）と表される。

OH⊥平面 ABC より，直線 OH は辺 AB と辺 AC の両方に垂直である（⑥）ことを利用すると，

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より $\left(\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}+x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}-\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=0-3=-3$，

$|\overrightarrow{AB}|=3$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$-3+9x=0$　　よって　$x=\dfrac{1}{3}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より　$\left(\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}+x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2=0$

ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{a}\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)=\vec{a}\cdot\vec{c}-|\vec{a}|^2=1-3=-2$，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より

$$-2+4y=0 \qquad \text{よって} \quad y=\frac{1}{2}$$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{6}\left(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|^2=\left|\frac{1}{6}\left(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)\right|^2=\frac{1}{6^2}\left|\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right|^2$$

$$=\frac{1}{6^2}\left(\left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+9\left|\vec{c}\right|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{6^2}(3+24+27+0-24+6)=1 \qquad \text{よって，} \left|\overrightarrow{\mathrm{OH}}\right|=1$$

以上より，四面体 OABC の体積 V は $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{OH}=\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 1=1$

(2)　$4\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ より

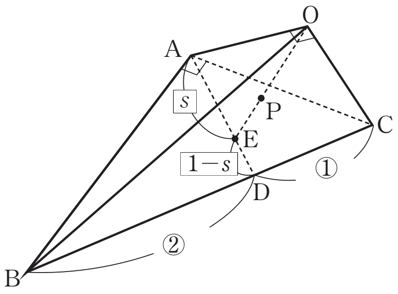
$$4\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)+2\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\vec{0}$$

$$9\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}} \qquad \text{よって} \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{9}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}+\frac{2}{3}s\vec{c} \quad \cdots\cdots ①$$



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$（$t$ は実数）

とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{9}t\vec{a}+\frac{1}{9}t\vec{b}+\frac{2}{9}t\vec{c} \quad \cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は１次独立かついずれも $\vec{0}$ ではないので，①，②より

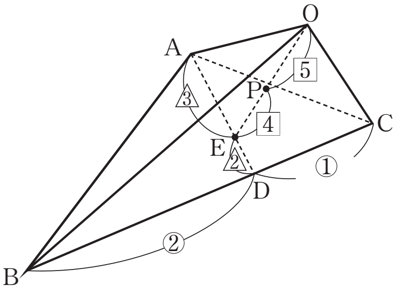
$$\begin{cases} 1-s=\frac{2}{9}t \\ \frac{1}{3}s=\frac{1}{9}t \\ \frac{2}{3}s=\frac{2}{9}t \end{cases}$$

これらをすべて満たす s，t は $s=\frac{3}{5}$，$t=\frac{9}{5}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{9}{5}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OE}}$　　したがって　$k=\frac{5}{9}$

以上より，$s=\frac{3}{5}$，$k=\frac{5}{9}$（①）であり，辺 BC を 2：1 に内分する点を D，線分 AD を 3：2 に内分する点を E，線分 OE を 5：4 に内分する点が P（③）である。

(3)(i)　(四面体 PABC の体積)

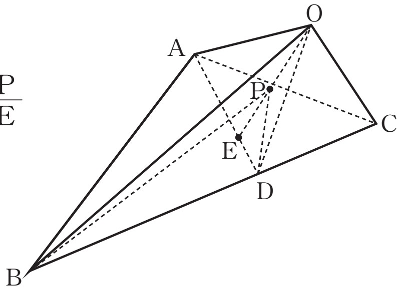


$=$(四面体 OABC の体積)$\times\dfrac{\mathrm{PE}}{\mathrm{OE}}$

$=V\times\dfrac{4}{9}$

$=\dfrac{4}{9}$

(四面体 POBD の体積)



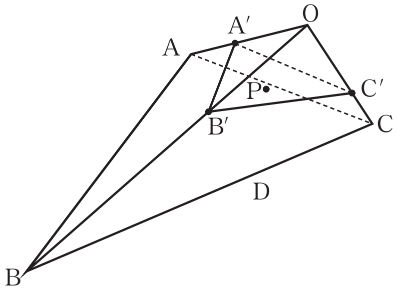
$=$(四面体 BOAD の体積)$\times\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\times\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OE}}$

$=$(四面体 OABC の体積)$\times\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BC}}\times\dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\times\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OE}}$

$=V\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{5}{9}$

$=\dfrac{4}{27}$

(ii)　$\mathrm{A'B'}=\mathrm{B'C'}=\mathrm{C'A'}$ より，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は正三角形。$\mathrm{PA'}=\mathrm{PB'}=\mathrm{PC'}$ より，点 P は $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の外心。



正三角形の外心と重心は一致するので

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$

$$=\frac{p}{3}\vec{a}+\frac{q}{3}\vec{b}+\frac{r}{3}\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立かついずれも $\vec{0}$ ではないので，

この式と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{9}\vec{b}+\dfrac{2}{9}\vec{c}$ より

$$\begin{cases}\dfrac{p}{3}=\dfrac{2}{9}\\[2mm]\dfrac{q}{3}=\dfrac{1}{9}\\[2mm]\dfrac{r}{3}=\dfrac{2}{9}\end{cases}$$

よって，$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$，$r=\dfrac{2}{3}$　(❼)